Nicht f. d. Austausch

Über ein asymptotisches Verhalten von erzwungenen Plattenschwingungen bei hohen Frequenzen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

von

Arnold Schoch

aus Stuttgart

Tag der Promotion: 2. VI. 1937

Tag der mündlichen Prüfung: 24. II. 1937

1937

N 22

Referenten: Prof. Dr. E. Meyer / T. H.

Prof. Dr. M. von Laue.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Erschienen in der Akustischen Zeitschrift.

AKUSTISCHE ZEITSCHRIFT

Drittes Heft | Zweiter Jahrgang | Mai 1937

Über ein asymptotisches Verhalten von erzwungenen Plattenschwingungen bei hohen Frequenzen

Von A. Schoch

Mitteilung aus dem Institut für Schwingungsforschung an der Technischen Hochschule zu Berlin

Mit 10 Abbildungen

I. Theorie

1. Aufgabe

Aus der Theorie erzwungener Schwingungen von elastischen Kontinuen kann man einige allgemeine Folgerungen ziehen, die an Hand des Beispiels der Biegungsschwingungen einer Platte abgeleitet werden. Die zu behandelnde Aufgabe sei so formuliert:

Auf eine ebene Platte wirke — nach irgendeiner Funktion über ihre Fläche verteilt — eine zeitlich veränderliche Kraft. Welche Durchbiegung (als Funktion des Ortes und der Zeit) erfährt die Platte unter dem Einfluß dieser Kraft?

2. Die Differentialgleichung des Problems

Die Platte liege in der xy-Ebene, ihr Rand schließe ein Gebiet G dieser Ebene ein. Es bedeuten:

$w(x, y, t)$ die Durchbiegung der Platte als Funktion des Ortes und der Zeit,
$p(x, y, t)$ den auf sie ausgeübten Druck, ebenfalls eine Funktion des Ortes und der Zeit,
d die Dicke der Platte,
ϱ die Dichte des Plattenmaterials,
E seinen Elastizitätsmodul,
μ das Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdehnung.

d, ϱ, E sollen auf der Platte konstant sein.

Bei einer Platte, deren Dicke klein im Vergleich zu ihren Abmessungen in Richtung ihrer Fläche ist, genügt $w(x, y, t)$ der Differentialgleichung[1])

$$(1) \qquad \varrho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E d^3}{12(1-\mu^2)} \Delta \Delta w = p(x, y, t) .$$

Zu der Differentialgleichung (1) kommen noch Randbedingungen hinzu, die davon abhängen, wie die Platte festgehalten ist. Wir brauchen sie hier nicht im einzelnen zu kennen.

3. Die Berücksichtigung der Dämpfung

Der Dämpfung streng Rechnung zu tragen, ist nicht möglich, weil unsere Kenntnis des Dämpfungsmechanismus noch ungenügend ist, außerdem wohl auch große mathematische Schwierigkeiten dadurch entstehen würden. Es genügt hier aber, die wesentlichsten Eigenschaften einer Dämpfung einzuführen, um ein physikalisch vernünftiges Verhalten der Lösungen von (1) zu erreichen.

Am zweckmäßigsten wählen wir also den mathematisch einfachsten Ansatz. Er sieht folgendermaßen aus: Zunächst beschränken wir uns auf zeitlich sinusförmig veränderliche Kräfte

$$p(x, y, t) = p(x, y)\, e^{i\omega t}$$

(ω Kreisfrequenz der anregenden Kraft). Die entstehende stationäre Bewegung ist dann ebenfalls mit der Zeit sinusförmig veränderlich. Nun können wir eine Dämpfung dadurch einführen, daß wir für den Elastizitätsmodul in (1) einen

[1]) G. Kirchhoff, Gesammelte Abhandlg. Leipzig 1882, S. 237. H. Geiger und K. Scheel, Hdb. Physik, Bd. VI, Berlin 1928, Kap. 4.

„komplexen Elastizitätsmodul" $E(1+i\eta)$ einsetzen. Die Zahl η kennzeichnet die Dämpfung und ist als Materialgröße anzusehen.

Der Ansatz bedeutet eine Phasenverschiebung zwischen elastischer Spannung und Dehnung im Sinne einer Nacheilung der Dehnung. Und dies wiederum heißt, daß die elastischen Kräfte während einer Periode im Mittel Arbeit leisten, die nicht wieder zurückgewonnen wird, für den mechanischen Vorgang also Verlustarbeit darstellt.

Die Zahl η kann irgendeine Funktion der Frequenz sein. Wir nehmen sie im folgenden meist als unabhängig von der Frequenz an, weil diese Annahme mathematisch am einfachsten ist, außerdem erfahrungsgemäß bei vielen Stoffen recht gut erfüllt ist[1]).

Ein anderer oft angewandter Dämpfungsansatz läßt an jedem Plattenelement eine zu seiner Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft angreifen. Bei Beschränkung auf sinusförmige Schwingungen kann er ebenfalls durch einen komplexen Elastizitätsmodul dargestellt werden. η erweist sich dann umgekehrt proportional zur Frequenz.

An Stelle von (1) haben wir nunmehr die Differentialgleichung

$$(2) \qquad \varrho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E(1+i\eta)d^3}{12(1-\mu^2)} \Delta\Delta w = p(x,y)\, e^{i\omega t}.$$

Die Beschränkung auf sinusförmige Schwingungen bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, weil man nicht-sinusförmige Kräfte nach dem Fourierschen Satz durch eine Überlagerung sinusförmiger darstellen kann. Da die Differentialgleichung linear ist, und wir die Randbedingungen linear und homogen voraussetzen werden, überlagern sich auch die zugehörigen Bewegungen. Ob allerdings diese Überlagerung auch bei vorhandener Dämpfung noch richtig ist, hängt von dem Dämpfungsgesetz ab und läßt sich nicht ohne weiteres überblicken.

[1]) E. Meyer, Körperschallmessungen in Raum- und Bauakustik, Z. VDI 78 (1934), S. 957. C. Costadoni, Ein elektrodynamisches Gerät zur Messung mechanischer Scheinwiderstände, Z. techn. Physik 17 (1936), S. 108.

4. Die Lösung der Differentialgleichung

Für die stationäre sinusförmige Lösung machen wir den Ansatz

$$w = u(x,y)\, e^{i\omega t}.$$

Mit diesem Ansatz erhält man aus (2) nach Abspalten des Zeitfaktors $e^{i\omega t}$ eine Differentialgleichung für die Amplitudenfunktion $u(x,y)$:

$$(3) \qquad \Delta\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2} u = \frac{p(x,y)}{\varrho d c^2},$$

wobei zur Abkürzung

$$(4) \qquad \frac{E(1+i\eta)d^2}{12\varrho(1-\mu^2)} = c_0^2(1+i\eta) = c^2$$

gesetzt ist.

$u(x,y)$ ist im allgemeinen komplex. Der reelle und imaginäre Teil davon hat gegenüber der anregenden Kraft die Phasenverschiebung 0 und $\pi/2$.

Das naheliegendste Verfahren, die inhomogene Differentialgleichung (3) zu lösen, ist $p(x,y)$ durch eine Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen des zugehörigen homogenen Problems darzustellen, und auch die gesuchte Lösung als solche Reihe anzusetzen[1]).

Wir betrachten kurz die homogene Differentialgleichung

$$(5) \qquad \Delta\Delta u - \lambda u = 0,$$

wo

$$(6) \qquad \lambda = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Unter gewissen Voraussetzungen über die Randbedingungen gelten folgende Sätze[2]):

1. Lösungen von (5), die die Randbedingungen erfüllen und nicht identisch verschwinden, gibt es nur für bestimmte Eigenwerte $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Die Eigenwerte bilden eine abzählbare Folge von positiven Zahlen, die sich nach wachsender Größe ordnen lassen. Sie nehmen unbeschränkt zu.

2. Die zu den Eigenwerten gehörigen Lösungen, die Eigenfunktionen $u_k(x,y)$, bil-

[1]) Siehe z. B. R. Courant und D. Hilbert, Methoden der math. Physik, Bd. 1, Berlin 1931, Kap. V, § 3 und § 5.

[2]) R. Courant und D. Hilbert, l. c., Kap. V, § 5 und § 14. Die Randbedingungen müssen in Gleichungen bestehen, die in w bzw. u und den räumlichen Ableitungen davon linear und homogen sind.

den ein vollständiges Funktionensystem, nach denen jede mit stetigen Ableitungen bis zur 4. Ordnung versehene, den Randbedingungen genügende Funktion in eine Reihe entwickelt werden kann, die in dem Gebiet G absolut und gleichmäßig konvergiert. — Von dieser Eigenschaft der Eigenfunktionen machen wir Gebrauch bei der Lösung der inhomogenen Gleichung.

Zuvor leiten wir noch eine Beziehung ab, die zwischen der Dämpfung η und dem logarithmischen Dekrement Λ der freien Schwingungen besteht, und die wir später brauchen. Die den Eigenwerten durch (6) zugeordneten Frequenzen sind die Frequenzen der freien Schwingungen. Da c^2 komplex ist, die λ_k aber reell sind, müssen die ω_k komplex sein. D. h. die Eigenschwingungen, deren zeitlicher Verlauf durch $e^{i\omega_k t}$ gegeben ist, sind gedämpft. Streng genommen dürfen wir allerdings nicht so schließen. Eine gedämpfte Schwingung ist keine stationäre Sinusschwingung. Unser Dämpfungsansatz gilt daher nicht für sie. Aber wenn die Dämpfung gering ist, verlaufen die freien Schwingungen wenigstens annähernd stationär, und die Folgerungen werden annähernd richtig sein.

Unter der Voraussetzung $\eta \ll 1$ folgt aus (6) und (4)

$$\omega_k = c_0 \sqrt{\lambda_k (1+i\eta)} \approx c_0 \sqrt{\lambda_k}\left(1 + i\,\frac{\eta}{2}\right) = \omega_{k0}\left(1 + i\,\frac{\eta}{2}\right),$$

wobei $c_0 \sqrt{\lambda_k} = \omega_{k0}$ die Eigenfrequenzen ohne Dämpfung sind. Der zeitliche Verlauf einer Eigenschwingung ist also gegeben durch

$$e^{i\omega_k t} = e^{-\frac{\eta}{2}\omega_{k0} t}\, e^{i\omega_{k0} t}.$$

Hieraus folgt ein logarithmisches Dekrement

$$\Lambda = \pi\eta.$$

Um die Lösung der inhomogenen Gleichung (3) zu finden, entwickeln wir, wie bereits bemerkt, $p(x, y)$ nach den Eigenfunktionen:

$$p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k\, u_k(x, y),$$

und setzen auch die gesuchte Lösung als solche Reihe mit unbekannten Koeffizienten an (wir müssen von ihr gleichmäßige Konvergenz voraussetzen):

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, u_k(x, y).$$

Dann sind die Randbedingungen jedenfalls erfüllt, da die Eigenfunktionen sie einzeln erfüllen. Geht man mit diesen Entwicklungen in die Differentialgleichung (3) ein, dann erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\, \Delta\Delta\, u_k - a_k \frac{\omega^2}{c^2}\, u_k - \frac{p_k}{\varrho d c^2}\, u_k\right) = 0.$$

Da die Eigenfunktionen die Gleichung (5) erfüllen, kann man $\Delta\Delta\, u_k$ durch $\frac{\omega_k^2}{c^2}\, u_k$ ersetzen und erhält

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{c^2}\left[a_k\,(\omega_k^2 - \omega^2) - \frac{p_k}{\varrho d}\right] = 0.$$

Hieraus folgt, da die Eigenfunktionen linear unabhängig sind:

$$a_k = \frac{1}{\varrho d}\,\frac{p_k}{\omega_k^2 - \omega^2} = \frac{1}{\varrho d}\,\frac{p_k}{\omega_{k0}^2 (1 + i\eta) - \omega^2}.$$

Die gesuchte Amplitudenfunktion der stationären erzwungenen Schwingung ist also

$$(7) \qquad u(x, y) = \frac{1}{\varrho d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{\omega_{k0}^2 (1 + i\eta) - \omega^2}\, u_k(x, y).$$

Die Folgerungen, die sich aus dieser Lösung ergeben, gelten größtenteils auch für den Fall, daß die Kraft nicht stetig über die Plattenfläche verteilt ist, sondern aus Einzelkräften besteht, die in Punkten angreifen. Denn man kann solche Einzelkräfte approximieren durch Funktionen, die den Entwicklungsbedingungen genügen.

5. *Diskussion der Lösung*

Wir bringen (7) auf eine zur Diskussion besser geeignete Gestalt:

$$(8) \qquad u(x, y) = \frac{1}{\varrho d\, \omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} p_k\, u_k(x, y) \left\{ \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 + \eta^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right]^2 + \eta^2} - 1 - i\,\frac{\eta \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right]^2 + \eta^2} \right\}.$$

Der Index 0 bei ω_{k0} ist von hier an weggelassen.

Der erste Faktor lehrt, daß die Amplitude bis auf Schwankungen, die durch die Summe rechts bedingt sind, mit der Frequenz wie $1/\omega^2$

abnimmt und mit der Masse der Platte je Flächeneinheit, ϱd, wie $1/\varrho d$ abnimmt. Die Summe rechts zeigt, daß die Verteilung der Amplituden über die Plattenfläche aus einer Überlagerung im allgemeinen sämtlicher Eigenfunktionen besteht, d. h. also derjenigen Amplitudenverteilungen, die bei den Eigenschwingungen herrschen. Für den Beitrag, den eine Eigenfunktion, z. B. die k-te liefert, sind zweierlei Dinge maßgebend: 1. der zugehörige Entwicklungskoeffizient p_k der Kraftverteilung und 2. der komplexe Ausdruck in der geschweif-

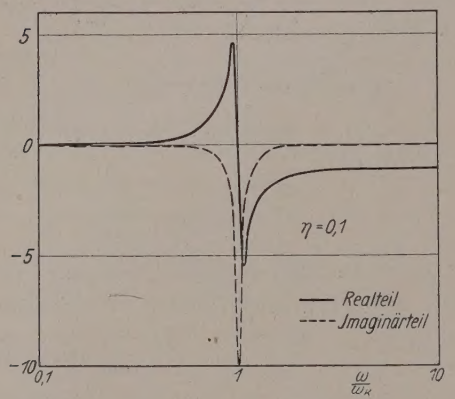

Abb. 1. Resonanzkurve eines Glieds der Summe in Gleichung (8)

ten Klammer. Dessen reeller und imaginärer Teil durchlaufen bei Veränderung von ω/ω_k Resonanzkurven, die in Abb. 1 für den Wert $\eta = 0{,}1$ dargestellt sind. Für $\omega = \omega_k$, d. h. wenn die anregende Frequenz mit der k-ten Eigenfrequenz in Resonanz ist, hat der absolute Betrag der geschweiften Klammer ein Maximum der Größe $1/\eta$; der Imaginärteil hat etwa gleichzeitig ein Maximum ungefähr derselben Größe. Der Realteil wechselt in der Umgebung der Resonanzstelle sein Vorzeichen entsprechend der Tatsache, daß die Amplitude unterhalb der Resonanzfrequenz mit der Kraft in Phase, oberhalb aber in Gegenphase ist. Die Phasenverschiebung bezieht sich dabei auf den zugehörigen Kraftanteil

$$p_k u_k(x, y)\, e^{i\omega t}.$$

p_k kann ebenfalls komplex sein, was z. B. der Fall ist, wenn die auf die Platte wirkende Kraft $p(x, y)$ nicht überall dieselbe Phase hat.

Die Gesetzmäßigkeiten, die der Ausdruck (8) enthält, sind im allgemeinen sehr verwickelt. Übersichtliche Verhältnisse herrschen nur in besonderen Fällen, z. B. wenn die Reihe (8) sich auf ein Glied oder einige wenige Glieder reduziert. Dieser Fall kann aus verschiedenen Gründen eintreten. Entweder die Kraftverteilung baut sich nur aus einer oder aus einigen wenigen Eigenfunktionen auf, was allerdings praktisch wohl selten verwirklicht ist. Oder die Dämpfung ist sehr klein; dann überwiegt, wenn ω gleich einer Eigenfrequenz, z. B. ω_k, ist, das k-te Summenglied alle übrigen[1]). Daraus erklärt sich bekanntlich die Erfahrung, daß man an wenig gedämpften, in Resonanz erregten Platten meist Chladnische Klangfiguren erhält, die einzelnen Eigenfunktionen entsprechen, ohne daß die Art der Anregung sehr großen Einfluß auf sie hat. Wo nicht eines, genügen vielfach doch nur einige wenige Summenglieder zur Berechnung der Amplitudenfunktion, wie P. Debye bei der Deutung einer Anzahl beobachteter Klangfiguren gezeigt hat, die nicht durch einzelne Eigenfunktionen zu erklären waren[2]).

Wenn das k-te Summenglied überwiegt, so kann sich dies natürlich nur auf Gebiete der Platte beziehen, wo die zugehörige Eigenfunktion $u_k(x, y)$ von Null genügend verschieden ist. In der Umgebung der Knotenlinien, die durch $u_k(x, y) = 0$ gegeben sind, gewinnen auch die übrigen Summenglieder Einfluß. Sie bewirken, daß die Knotenlinien nie ganz scharf sind. Da die in den Knotenlinien übrigbleibende Bewegung im allgemeinen von solchen Summengliedern herrührt, deren Eigenfrequenzen wesentlich unterhalb oder oberhalb der anregenden Frequenz liegen, haben sie praktisch gegenüber der anregenden Kraft die Phasenverschiebungen

[1]) Es kommt vor, daß mehrere Eigenfrequenzen gleich sind. Dann sind natürlich alle zu einer solchen „mehrfachen Eigenfrequenz" gehörigen Glieder heranzuziehen.

[2]) P. Debye, Eine Bemerkung zu der Arbeit von F. A. Schulze: „Einige neue Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahlen höchster Töne usw." Ann. Physik 25 (1908), S. 819.

0 oder π ($p(x, y)$ dabei überall gleichphasig angenommen). Die Phasenverschiebung in den Schwingungsbäuchen ist aber $\pm \pi/2$ (vgl. dazu Abb. 1). Die Schwingung in den Knoten ist also gegenüber der in den Bäuchen um $\pi/2$ im einen oder anderen Sinne phasenverschoben.

Beim Übergang über eine Knotenlinie ändert sich die Phase wegen des Einflusses der anderen Summenglieder stetig und zwar um so langsamer, je weniger das Resonanzglied überlegen ist, d. h. je unschärfer die Knotenlinie ist. Insbesondere also bei Nicht-Resonanzfrequenzen langsamer als bei Resonanzfrequenzen.

Diese aus (8) zu folgernden Eigenschaften der Schwingungsphasen sind in einer neueren Arbeit von R. Schünemann experimentell festgestellt worden[1]).

Wenn die anregende Frequenz hoch im Vergleich zur tiefsten Eigenfrequenz einer Platte ist, läßt sich ein asymptotisch gültiges Gesetz für die Amplitude angeben.

Wir zerlegen die Reihe (8) in zwei Teilreihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{N-1} + \sum_{k=N}^{\infty} .$$

N werde nun so groß gewählt, daß die zweite Summe für alle Werte von x, y und ω innerhalb einer gegebenen Genauigkeit vernachlässigt werden kann. Dazu ist erforderlich, daß (8) gleichmäßig in x, y und ω konvergiert. Dies ist der Fall, wenn man die physikalisch plausible Annahme macht, daß die Dämpfung η einen kleinsten Wert nicht unterschreitet (sei sie sonst in beliebiger Weise frequenzabhängig). Dann gibt es nämlich für den absoluten Betrag der Klammerausdrücke in (8) eine für alle ω gültige obere Schranke M, und es gilt die Abschätzung:

$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} p_k u_k(x, y) \{ \ldots \} \right| < M \sum_{k=N}^{\infty} | p_k u_k(x, y) | .$$

$\sum_k p_k u_k$ ist absolut und gleichmäßig konvergent (s. S. 115). Die rechte Seite der Ungleichung kann also durch genügend großes N beliebig klein gemacht werden, und damit auch die linke Seite[1]). Wie man aus der Ungleichung sieht, ist das erforderliche N um so größer, je schlechter die Reihe $\sum_k p_k u_k$ konvergiert, und je größer M, d. h. je kleiner die Dämpfung ist.

Lassen wir nun für alle $k < N$ $\frac{\omega}{\omega_k} \gg 1$ werden, dann strebt der Realteil der geschweiften Klammer gegen -1, der Imaginärteil gegen 0 (vgl. Abb. 1). (8) strebt damit gegen

$$u(x, y) = -\frac{1}{\varrho d \omega^2} \sum_{k=1}^{N-1} p_k u_k(x, y) .$$

Dies ist im Rahmen der gegebenen Genauigkeit zu ersetzen durch

$$u(x, y) = -\frac{p(x, y)}{\varrho d \omega^2} . \tag{9}$$

Die Gleichung (9) würde sich unmittelbar ergeben unter der Voraussetzung, daß die Flächenelemente der Platte sich unabhängig voneinander bewegen können, d. h. die Platte keine Biegungssteife besitzt. Einem derartigen Verhalten, bei dem die elastischen und dämpfenden Kräfte den Trägheitskräften gegenüber keine Rolle mehr spielen, nähern sich erzwungene Plattenschwingungen also mit wachsender Frequenz an. Die Amplitudenverteilung geht dabei einfach in ein Abbild der Kraftverteilung über.

6. *Andere elastische Kontinua*

Die für Platten mitgeteilten Ergebnisse lassen sich in gleicher Weise für alle ähnlichen elastischen Kontinuen wie Saiten, Stäbe, Membranen ableiten. Der einzige Unterschied ist, daß an Stelle von (1) eine andere Differentialgleichung tritt. Alles weitere läßt sich wörtlich übertragen.

7. *Spezielle Beispiele*

a) Die Saite. Die Amplitudenfunktion für die Biegungsschwingungen einer Saite, die

[1]) R. Schünemann, Über erzwungene Schwingungen einer kreisförmigen Platte mit freiem Rand, Ann. Physik 24 (1935), S. 507.

[1]) Wenn die Dämpfung durch eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft verursacht ist, gilt $\eta \sim \frac{1}{\omega}$. In diesem Falle gibt es keine für alle ω gültige Schranke M. Trotzdem könnte (8) noch gleichmäßig in ω konvergieren, da ja die oben durchgeführte Abschätzung sehr ungünstig ist.

durch eine auf ihrer ganzen Länge gleiche Kraft $pe^{i\omega t}$ je Längeneinheit angeregt wird, genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\omega^2}{c^2}u=-\frac{p}{\sigma c^2},$$

wo

$$c^2=\frac{S(1+i\eta)}{\sigma}=c_0^2(1+i\eta).$$

Hierbei ist S die Spannung der Saite, σ ihre Masse je Längeneinheit.

Um die (8) entsprechende Reihe aufzustellen, muß man die Eigenfunktionen, die Eigenfrequenzen und die Entwicklungskoeffizienten der Kraftverteilung ermitteln. Ist die Saite bei $x=0$ und $x=l$ festgehalten, dann lauten die Randbedingungen

$$u(0)=0\,,\quad u(l)=0\,,$$

und es ergeben sich die Eigenfunktionen

$$u_k=\sin\frac{k\pi x}{l}\,,\qquad (k=1,2,\ldots),$$

die ungedämpften Eigenfrequenzen

$$\omega_k=k\frac{c_0\pi}{l}\,,\qquad (k=1,2,\ldots),$$

und die Entwicklungskoeffizienten

$$p_k=\begin{cases}\frac{4p}{\pi k}\,, & (k=1,3,5,\ldots),\\ 0\,, & (k=2,4,6,\ldots).\end{cases}$$

Da für alle geraden k die Entwicklungskoeffizienten Null sind, treten in der Lösung nur die Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen mit ungeradem k, d. h. nur die ungeraden Teiltöne der Saite auf. Dies ist eine Folge der in bezug auf die Mitte der Saite symmetrischen Kraftverteilung.

Die Reihenentwicklung selbst anzuschreiben lohnt nicht, da die Lösung in diesem Fall auch in geschlossener Form darstellbar ist. Macht man nämlich den Ansatz

$$u=A_1e^{i\frac{\omega}{c}x}+A_2e^{-i\frac{\omega}{c}x}+A_3\,,$$

dann kann man die Konstanten A_1, A_2, A_3 so bestimmen, daß er Differentialgleichung und Randbedingungen erfüllt. Um das Ergebnis in bequemer Form schreiben zu können, ist es vorteilhaft, hierbei die Randbedingungen durch

$$u\left(-\frac{l}{2}\right)=0\,,\quad u\left(\frac{l}{2}\right)=0$$

darzustellen. Es ergibt sich dann:

$$u(x)=\frac{p}{\sigma\omega^2}\left(\frac{\cos\frac{\omega}{c}x}{\cos\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}}-1\right).$$

Nach Trennung von reellem und imaginärem Teil geht dies über in:

$$(10)\qquad u=\frac{p}{\sigma\omega^2}\left[\frac{\cos\omega^*(1+\xi)\frac{\pi}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\omega^*(1-\xi)\frac{\Lambda}{4}+\cos\omega^*(1-\xi)\frac{\pi}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\omega^*(1+\xi)\frac{\Lambda}{4}}{2\left(\cos^2\omega^*\frac{\pi}{2}+\mathfrak{Sin}^2\omega^*\frac{\Lambda}{4}\right)}\right.$$
$$\left.-1-i\,\frac{\sin\omega^*(1+\xi)\frac{\pi}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\omega^*(1-\xi)\frac{\Lambda}{4}+\sin\omega^*(1-\xi)\frac{\pi}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\omega^*(1+\xi)\frac{\Lambda}{4}}{2\left(\cos^2\omega^*\frac{\pi}{2}+\mathfrak{Sin}^2\omega^*\frac{\Lambda}{4}\right)}\right].$$

Hierbei sind $\omega^*=\frac{\omega}{\omega_1}$ und $\xi=\frac{x}{l/2}$ neue Variable, und Λ ist eine Abkürzung für einen umständlichen Ausdruck in η. Für $\eta\ll 1$ geht Λ in das logarithmische Dekrement über und hängt mit η durch die S. 115 angegebene Beziehung zusammen.

Resonanz tritt ein, wenn der Nenner von (10) ein Minimum annimmt. Bei kleiner Dämpfung gilt dann fast genau

$$\cos\omega^*\frac{\pi}{2}=0$$

oder

$$\omega^*=1,3,5,\ldots$$

Es treten also — wie bereits festgestellt — nur die ungeraden Teiltöne als Resonanzfrequenzen auf. Der Übergang zur asymptotisch gültigen Formel vollzieht sich so, daß die Brüche in der Klammer für $\omega^*\to\infty$ gegen Null streben, da in deren Nenner ein Glied mit $\mathfrak{Sin}^2$ steht gegen $\mathfrak{Sin}$ oder $\mathfrak{Cof}$ im Zähler[1]).

[1]) Dies gilt wiederum nur, wenn Λ mit der Frequenz nicht zu stark abnimmt. Der S. 117 Anm. betrachtete Dämpfungsansatz führt beim vorliegenden Beispiel auf kein asymptotisches Gesetz, wie sich aus (10) ergibt.

In Abb. 2 ist getrennt Realteil, Imaginärteil und absoluter Betrag des Klammerausdrucks in (10) in Abhängigkeit von ω^* dargestellt, und zwar für die Mitte der Saite ($\xi = 0$) und zwei verschiedene Dämpfungen. Die gestrichelten Linien zeigen, wie die verschiedenen Maxima und Minima sich ihren asymptotischen Werten nähern. Es sei noch angemerkt, daß in diesem Beispiel keine der Eigenfunktionen, die am Aufbau der Amplitude beteiligt sind, in der Saitenmitte einen Knoten hat.

Abb. 3 zeigt den Klammerausdruck in (10) bei festgehaltener Frequenz in Abhängigkeit von ξ, oder mit anderen Worten die Amplitudenverteilung längs der Saite, nach Real- und Imaginärteil getrennt. Einmal fällt die anregende Frequenz mit einer tieferen und einmal mit einer höheren Eigenfrequenz zu-

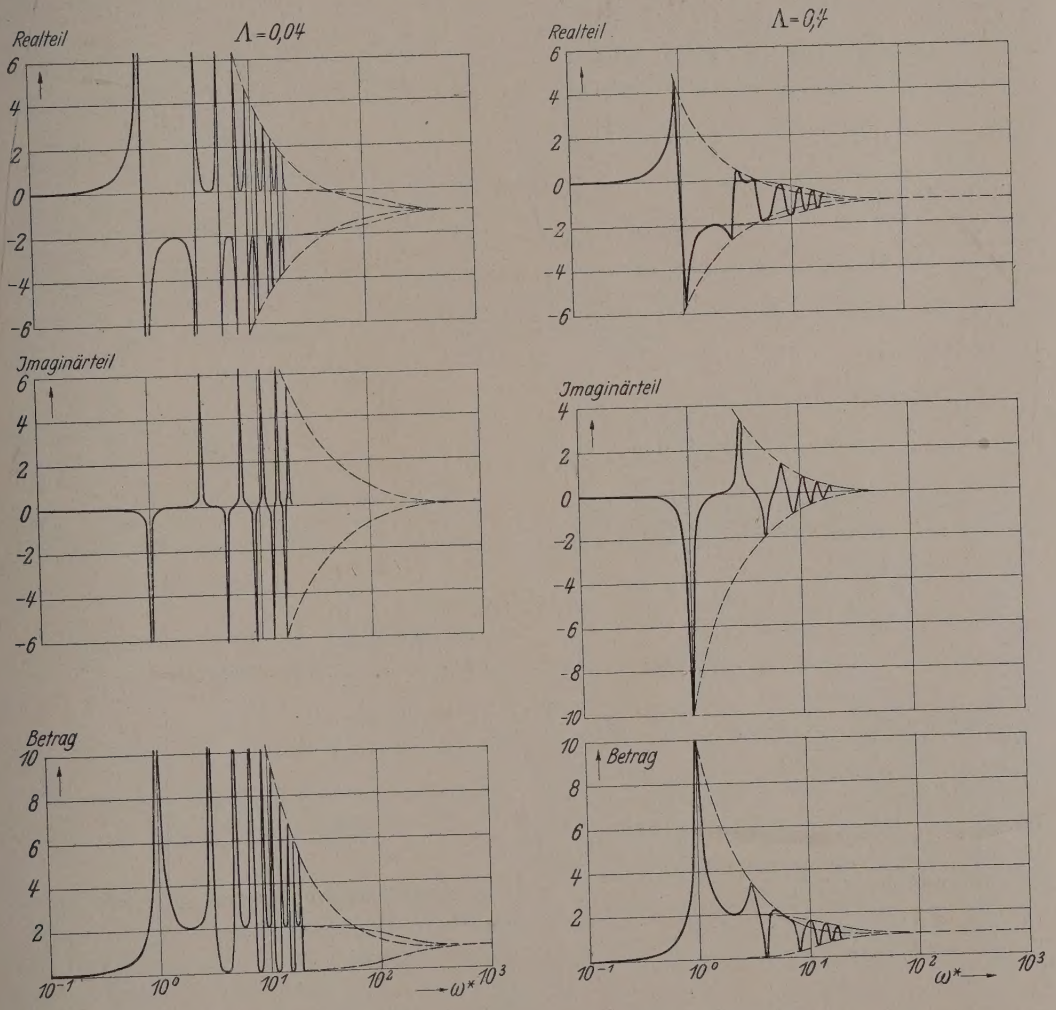

Abb. 2. Die Größe $\frac{\sigma \omega^2 u}{p}$ in Abhängigkeit von der Frequenz für die Mitte einer Saite und gleichmäßig verteilte Kraft, berechnet

sammen. Beide Fälle sind wieder für zwei verschiedene Dämpfungen dargestellt. Die Kurven lassen erkennen, in welcher Weise sich die Amplitudenverteilung ihrer asymptotischen Gestalt nähert. Auch die Bemerkungen von S. 117 über die Schärfe der Knotenlinien und die Phasenverhältnisse in ihrer Umgebung werden durch die Abbildung illustriert.

Z. B. erhält man im Falle des an beiden Enden gelenkig gelagerten Stabs, für den die Randbedingungen gelten:

$$u\left(-\frac{l}{2}\right)=0\,,\quad u\left(\frac{l}{2}\right)=0\,,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=-\frac{l}{2}}=0\,,\qquad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=\frac{l}{2}}=0\,,$$

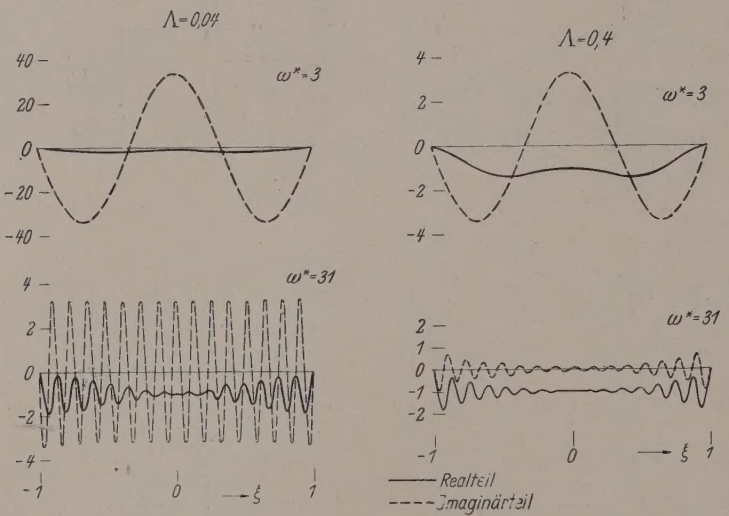

Abb. 3. Amplitudenverteilung längs einer Saite, berechnet

b) Der Stab. Ein Stab, der dünn im Vergleich zu seiner Länge ist, werde durch eine überall gleiche Kraft $pe^{i\omega t}$ je Längeneinheit zu erzwungenen Biegungsschwingungen angeregt. Die Amplitude dieser Schwingungen genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{d^4u}{dx^4}-\frac{\omega^2}{c^2}u=\frac{p}{\varrho F c^2}\,,$$

wo

$$c^2=\frac{EJ}{\varrho F}(1+i\eta)\,.$$

Hierbei ist F die Fläche, J das Flächenträgheitsmoment des Stabquerschnittes bezogen auf die Achse, um die sich die Querschnitte bei der Biegung drehen.

Auch in diesem Fall kann man die Lösung in geschlossener Form darstellen. Der dafür passende Lösungsansatz ist:

$$u=A_1e^{i\frac{\omega}{c}x}+A_2e^{-i\frac{\omega}{c}x}+A_3e^{\frac{\omega}{c}x}+A_4e^{-\frac{\omega}{c}x}+A_5\,.$$

die Amplitudenfunktion

$$u(x)=\frac{p}{\varrho F\omega^2}\left(\frac{\cos\frac{\omega}{c}x}{2\cos\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}}+\frac{\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{c}x}{2\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}}-1\right).$$

c) Rechteckige Platte. Bei Platten gelingt in keinem Falle eine Lösung in geschlossener Form wie bei den vorhergegangenen Beispielen. Eine numerische Auswertung der Reihenentwicklung wäre außerordentlich mühsam. Wir müssen uns daher mit den allgemeinen Aussagen, die aus (8) gefolgert wurden, begnügen. Danach sind ja die Abb. 2 und 3 in allem qualitativ Wesentlichen auch für Platten gültig.

Für den Fall der rechteckigen Platte mit gelenkig gelagerten Rändern — der mathematisch am einfachsten ist und dessen Verwirklichung bei den in II beschriebenen Versuchen ange-

strebt war, — seien aber wenigstens kurz die Eigenfunktionen, die Eigenfrequenzen und die Entwicklungskoeffizienten der Kraftverteilung bei einer auf der ganzen Fläche konstanten Kraft $p e^{i\omega t}$ je Flächeneinheit angegeben.

Die Randbedingungen lauten in diesem Fall, wenn die Platte durch $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ begrenzt ist:

$$u(0,y)=0,\ u(a,y)=0,$$
$$u(x,0)=0,\ u(x,b)=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \text{ für } x=0 \text{ und } x=a,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0 \text{ für } y=0 \text{ und } y=b.$$

Hierzu gehören die Eigenfunktionen

$$u_{m\,n}(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

und die Eigenfrequenzen

$$\omega_{m\,n}=c_0\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right).$$

Ist die Platte quadratisch $(a=b)$, dann ist

$$\omega_{m\,n}=\frac{c_0\pi^2}{a^2}(m^2+n^2)=\omega_{11}\frac{m^2+n^2}{2}.$$

Die Entwicklungskoeffizienten der angenommenen Kraftverteilung sind:

$$p_{m\,n}=\begin{cases}\dfrac{16\,p}{\pi^2\,m\,n}, & (m,n=1,3,5\ldots),\\ 0, & (m,n=2,4,6\ldots).\end{cases}$$

In der Reihenentwicklung für u ist also über 2 Indizes m und n zu summieren.

II. Messungen an erzwungenen Plattenschwingungen

1. Aufgabe

Zur Prüfung der in I. gezogenen Folgerungen wurden einige Messungen an erzwungenen Plattenschwingungen angestellt. Untersucht wurden quadratische, an den Rändern gelenkig gelagerte Platten, die durch eine über die Plattenfläche gleichmäßig verteilte, sinusförmig veränderliche Kraft angeregt wurden (vgl. das letzte Beispiel). Zweierlei Messungen wurden ausgeführt: 1. Messungen der stationären Durchbiegungsamplitude des Mittelpunkts der Platten in Abhängigkeit von der Frequenz. 2. Messungen der Amplitudenverteilung auf der Platte bei festen Frequenzen.

2. Meßanordnung

Die untersuchten quadratischen Platten hatten eine Seitenlänge von 18 cm. Sie wurden von 4 gegen ihre Ränder leicht angestemmten Leisten durch Reibung gehalten. Diese Art der Festhaltung verwirklicht mit guter Annäherung die Randbedingungen, die einer gelenkigen Lagerung des Randes entsprechen.

Die gleichmäßig verteilte anregende Kraft wurde elektrostatisch erzeugt mit Hilfe einer starren Anregungselektrode, die mit der (mit leitenden Oberflächen versehenen) Platte einen Plattenkondensator bildet (s. Abb. 4). Eine

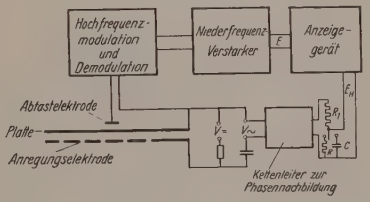

Abb. 4. Anordnung zur Messung erzwungener Plattenschwingungen

praktisch sinusförmig veränderliche Kraft wird in üblicher Weise erzielt, indem man an den Plattenkondensator die Summe einer sinusförmigen Wechselspannung $V_\sim$ und einer im Vergleich dazu hohen Gleichspannung $V_=$ anlegt[1]). Die Wechselkraft je Flächeneinheit wird aus Plattenabstand und Spannung berechnet. Sie betrug bei den Versuchen 4—5 dyn/cm².

Das zwischen Platte und Anregungselektrode eingeschlossene Luftpolster kann einen störenden Einfluß auf die Bewegung der Platte ausüben; um ihn möglichst zu vermindern, ist die Anregungselektrode mit vielen Löchern versehen. Wegen dieser Löcher ist die Berechnung der Kraft nach den für einen Plattenkondensator geltenden Formeln ungenau. Bei dem angewandten Ausmaß der Lochfläche (10% der Plattenfläche) ist diese Unsicherheit aber nicht

[1]) W. Wien und F. Harms, Hdb. Exp. Physik, Bd. 17, 2, Leipzig 1934, Kap. II, § 5.

größer als der Fehler der absoluten Werte der gemessenen Durchbiegungen[1]).

Bei der geringen Kraft sind nach der asymptotischen Formel (9) für $\varrho d = 0{,}1$ g cm^{-2} (die leichtesten Platten, die die für die Einspannung nötige Festigkeit haben, besitzen etwa diese Masse je Flächeneinheit) und $\omega = 10^4$ (etwa 1600 Hz) Durchbiegungsamplituden von $5 \cdot 10^{-7}$ cm zu erwarten. Um diese Größe noch einigermaßen genau messen zu können, ist nötig, daß die Meßapparatur wenigstens $5 \cdot 10^{-8}$ cm eben noch anzeigt!

Zum Nachweis und zur Messung so kleiner Durchbiegungen kommt nur eine Kapazitätsmethode in Betracht. An der gewünschten Stelle steht der Platte eine kleine Abtastelektrode gegenüber. Die Änderungen der Kapazität zwischen Abtastelektrode und Platte werden zur Modulation einer Hochfrequenzspannung ausgenutzt. Die niederfrequente Modulation wird dann durch einen Gleichrichter von der Hochfrequenz getrennt, genügend verstärkt und angezeigt.

Zur Modulation und Demodulation diente ein Gerät von R. v. Radinger[2]). Die Modulation geschieht dabei so, daß von einer konstanten Hochfrequenzspannung durch einen Spannungsteiler, der aus zwei Kondensatoren besteht, ein Bruchteil der Spannung abgegriffen wird. Einem der Kondensatoren ist die veränderliche Kapazität parallel geschaltet. Dadurch wird die abgegriffene Spannung moduliert. Diese Schaltung gewährleistet unbedingte Amplituden- und Phasentreue zwischen Kapazitätsänderung und Modulation, was die meist verwendete Rieggersche Schaltung, die die Kapazitätsänderungen zur Verstimmung eines elektrischen Schwingungskreises ausnutzt, wegen möglicher Einschwingvorgänge nicht sicher tut. — Die Demodulation geschieht durch eine Gleichrichterröhre mit einer negativen Gittervorspannung, die fast so groß ist wie die Amplitude der modulierten Hochfrequenz. Prozentual kleine Amplitudenänderungen der Hochfrequenz bewirken dadurch verhältnismäßig große prozentuale Änderungen des mittleren Anodenstroms der Gleichrichterröhre.

Die absolute Eichung der Meßanordnung in cm erfolgt mit Hilfe der meßbaren Änderung des mittleren Anodenstroms, die durch eine bekannte Verschiebung der Abtastelektrode

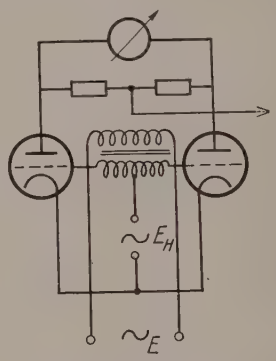

Abb. 5. Schaltung des wattmetrischen Anzeigegerätes

(mittels einer Mikrometerschraube zu bewerkstelligen) erzeugt wird.

Ein besonderes wattmetrisch arbeitendes Anzeigegerät zeigt die komplexe Amplitude nach Real- und Imaginärteil getrennt an (diese Trennung tritt ja auch in der Theorie in übersichtlicher Weise auf). Die von Turner und Namara angegebene Schaltung des Geräts zeigt Abb. 5[1]). Auf die Gitter zweier gleicher Röhren mit quadratischen Kennlinien wird die zu messende Sinusspannung $E = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$ im Gegentakt, außerdem eine Hilfsspannung $E_H = E_{H0} \cos(\omega_H t)$ im Gleichtakt gegeben. Die Spannung zwischen den beiden Anoden ist also proportional zu

$$(11) \qquad (E + E_H)^2 - (E - E_H)^2 = 4 E_0 E_{H0} \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega_H t .$$

Ein träges Galvanometer zeigt einen zeitlichen Mittelwert dieser Spannung an. Ist $\omega = \omega_H$,

[1]) Vgl. dazu R. v. Radinger, Meßeinrichtung zur Bestimmung akustischer und mechanischer Widerstände aus ihrer Rückwirkung auf ein elektrostatisches Antriebssystem. Diss. Berlin 1934, S. 5.

[2]) R. v. Radinger, l. c.

[1]) H. M. Turner und F. T. McNamara, An electron tube wattmeter and voltmeter and phase shifting bridge, Proc. Instn. Radio Engr. 18 (1930), S. 1743.

d. h. die Frequenz der zu messenden Spannung genau gleich der Frequenz der Hilfsspannung, dann ist der Mittelwert proportional zu $E_o E_{Ho} \cos\varphi$. Gibt man also der Hilfsspannung konstante Amplitude und gegenüber der Kraft, die die Plattenschwingungen anregt, die Phasenverschiebung 0 oder $\pi/2$, dann zeigt das Galvanometer proportional zum Real- oder Imaginärteil von E an.

Die Hilfsspannung E_H wird über einen Spannungsteiler (wahlweise R_1, R oder R_1, C in Abb. 4) von der Wechselspannung zwischen Platte und Anregungselektrode abgegriffen. Sie hat damit zwangsläufig dieselbe Frequenz wie die stationäre erzwungene Plattenschwingung. C ist so bemessen, daß $\frac{1}{\omega C} \ll R_1$ ist. Dann hat die Hilfsspannung gegenüber der anregenden Kraft die Phasenverschiebung 0 oder $-\pi/2$, je nachdem sie an dem Widerstand R oder an der Kapazität C abgegriffen wird. (Da die Hilfsspannung für alle Frequenzen konstant gehalten werden muß, muß C veränderbar sein).

Damit nun das wattmetrische Anzeigegerät Real- und Imaginärteil der Durchbiegungsamplitude zeigt, muß die Ausgangsspannung des Verstärkers, E_o, mit ihr proportional und in gleicher Phase sein. Dies ist wegen der Phasendrehung, die der Verstärker verursacht, nicht ohne weiteres der Fall. Um diesen Fehler auszuschalten, wird die Hilfsspannung durch einen geeigneten Kettenleiter geleitet (s. Abb. 4), der die Phasendrehung des Verstärkers im ganzen in Betracht kommenden Frequenzbereich möglichst genau nachbildet.

Ist $\omega \neq \omega_H$, dann ist der zeitliche Mittelwert von (11) Null, sofern das Galvanometer über eine genügend lange Zeit mittelt, oder anders ausgedrückt, sofern die Differenz $|\omega - \omega_H|$ genügend groß im Vergleich mit der reziproken Einstelldauer des Galvanometers ist. Das wattmetrische Anzeigegerät ist also selektiv für die Frequenz ω_H. Da man die Einstelldauer des Galvanometers recht groß wählen kann, kann man ohne Schwierigkeit für den „ausgeblendeten" Frequenzbereich eine Bandbreite von 1 Hz oder weniger erzielen. Diese Selektivität ist hier besonders wertvoll, da es sich um die Messung schwacher sinusförmiger Schwingungen inmitten eines starken Störspektrums (verursacht durch Verstärkerrauschen und vor allem durch stets vorhandene zufällige Erschütterungen) handelt.

Die Brauchbarkeit der Anordnung für Meßzwecke erfordert, daß die Anzeige der Durchbiegungsamplitude proportional ist, und daß der Proportionalitätsfaktor unabhängig von der Frequenz ist. Bei der aufgebauten Apparatur waren beide Forderungen befriedigend erfüllt. — Die kleinste beobachtbare Verschiebungsamplitude betrug einige 10^{-8} cm.

Die Amplituden des Plattenmittelpunkts in Abhängigkeit von der Frequenz wurden mit Hilfe eines Spiegelgalvanometers photographisch registriert. Der Vorschub des Registrierpapiers war dabei mit der Frequenzeinstellung des Schwebungssummers, der die Wechselspannung zur Anregung der Platte lieferte, gekuppelt. Außer Real- und Imaginärteil wurde hierbei immer auch der absolute Betrag registriert, wobei statt des wattmetrischen Anzeigegeräts das Spiegelgalvanometer mit einer Diode als Gleichrichter verwendet wurde. Abb. 6 zeigt einige Beispiele solcher Registrierungen, die alle an derselben Platte ausgeführt sind. Bei den durch senkrechte schwarze Striche markierten Frequenzen wurde jeweils der Verstärkungsgrad der Apparatur auf einen höheren Wert umgeschaltet. Das läßt sich bei dem großen Amplitudenbereich, der durchlaufen wird, nicht vermeiden. Die Beispiele sollen zeigen: 1. die Reproduzierbarkeit der Frequenzkurven bei unveränderter Einspannung einer Platte. Vgl. die nacheinander aufgenommenen Kurven *a* und *b*. 2. Die Wirksamkeit der selektiven wattmetrischen Anzeige; die Registrierung des absoluten Betrags (Abb. 6 d) ist mit einem Anzeigeinstrument aufgenommen, das für alle Frequenzen gleich empfindlich ist. Bei hoher Verstärkung ist daher ein beträchtlicher unregelmäßig schwankender Ausschlag vorhanden, der nur noch von störenden Erschütterungen herrührt. Bei den mit der selektiven Anzeige aufgenommenen Kurven ist von durch Störungen verursachten Unregelmäßigkeiten nichts zu

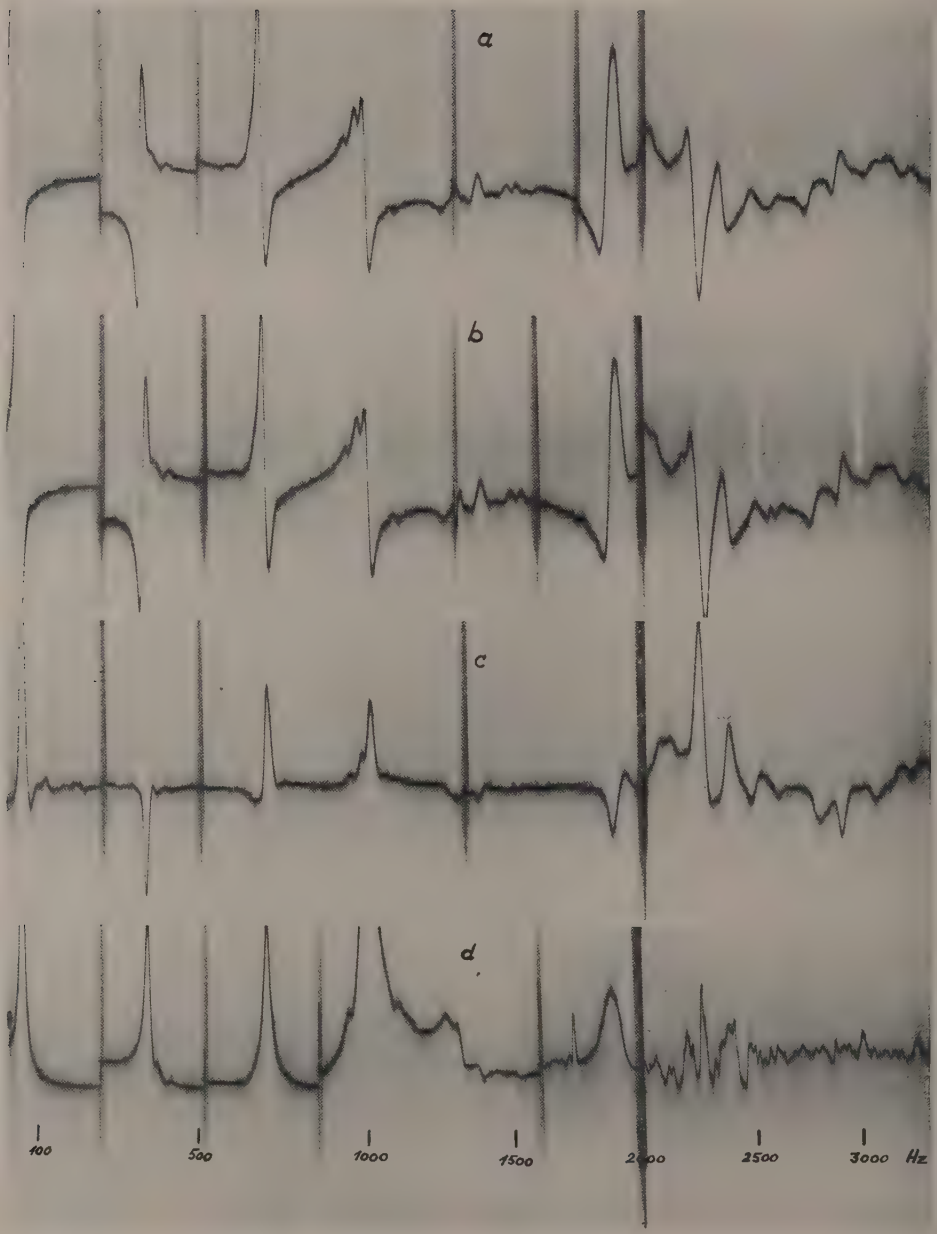

Abb. 6. Registrierungen der Amplituden einer Platte in Abhängigkeit von der Frequenz
a, *b* Realteil, nacheinander aufgenommen, *c* Imaginärteil, *d* Betrag

merken, wie die gute Reproduzierbarkeit der Kurven *a* und *b* zeigt.

Durch einige Vorversuche wurde festgestellt, welchen Einfluß auf die Frequenzkurven eine neu vorgenommene Einspannung derselben Platte und eine Veränderung des Luftpolsters zwischen Platte und Anregungselektrode (vorgenommen durch Vergrößerung der Anzahl der Löcher in der Anregungselektrode) hat. Es ergab sich, daß die Frequenzkurven bis etwa 1500 Hz zuverlässig reproduzierbar waren. Dagegen ließen sich bestimmte Einspannbedingungen nicht so genau wiederherstellen, daß auch bei höheren Frequenzen die Kurven sich reproduzierten. Die erhaltenen Registrieraufnahmen wurden daher nur bis 1500 Hz ausgewertet.

3. Meßergebnisse

Die lehrreichsten Meßergebnisse sind in den Abb. 7, 8 und 9 dargestellt. Die Abb. 7 und 8 zeigen die Frequenzkurven der Amplitude im Mittelpunkt von 2 Platten. Nähere Angaben über die Platten finden sich unter den Abbildungen; die dort angegebenen Werte der Dämpfung η sind aus den gemessenen Frequenzkurven ermittelt. Abszisse ist die Frequenz in Vielfachen der tiefsten Eigenfrequenz: $\omega^* = \omega/\omega_1$. Als Ordinate ist aufgetragen die mit $\frac{\varrho d \omega^2}{p}$ multiplizierte Amplitude u, die dem Summenausdruck von (8) entspricht.

Die relative Lage der theoretisch nach S. 121 zu erwartenden Resonanzfrequenzen ist durch kleine Pfeile gekennzeichnet. Sie stimmt mit der beobachteten recht gut überein. Insbesondere treten — wenigstens bei tiefen Frequenzen — keine durch die Art der Kraftverteilung verbotenen Resonanzfrequenzen auf. Die beobachteten Resonanzfrequenzen spalten teilweise etwas auf, was auf Unsymmetrien und Inhomogenitäten der Platten zurückzuführen ist. Die Aufspaltung tritt, wie es sein muß, nur bei mehrfachen Eigenfrequenzen auf. Im übrigen entspricht der Verlauf der Kurven qualitativ dem zu erwartenden. Ein genauerer Vergleich mit der Theorie würde die vorherige Kenntnis der Dämpfung η für alle Frequenzen erfordern, die ja einen großen Einfluß besonders auf die Höhe der Maxima hat.

In Abb. 9 ist wiedergegeben die gemessene Amplitudenverteilung längs eines Schnitts durch die Platte, zu der die Frequenzkurven Abb. 7 gehören. Der Schnitt geht parallel zu einer Seite durch die Plattenmitte. Die anregende

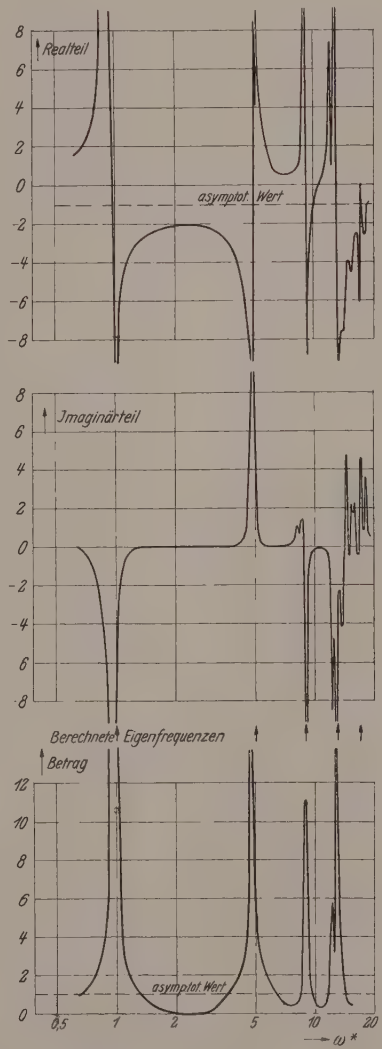

Abb. 7. $\frac{\varrho d \omega^2 u}{p}$ in Abhängigkeit von der Frequenz für die Mitte einer Platte und gleichmäßig verteilte Kraft, gemessen
Platte aus Glas, $d = 0{,}5$ mm, $\varrho d = 0{,}13$ gr cm^{-2}, $\omega_{11} = 78$ Hz, $\eta = 0{,}02$ bis $0{,}04$

Frequenz war nahe bei der zu den Indizes $m = 3$, $n = 3$ gehörigen Resonanzfrequenz $\omega^*_{33} = 9$. Der Imaginärteil ist praktisch allein durch die zugehörige Eigenfunktion gegeben. Legen wir die x-Achse in den Schnitt, dann ist die in merklicher Stärke am Aufbau des Realteils beteiligt sind, sind in Abb. 10 dargestellt. Auf diejenigen Anteile, die zu $m \neq 3$, $n \neq 3$ gehören, hat die genaue Lage der anregenden Frequenz und die Dämpfung (solange sie klein ist)

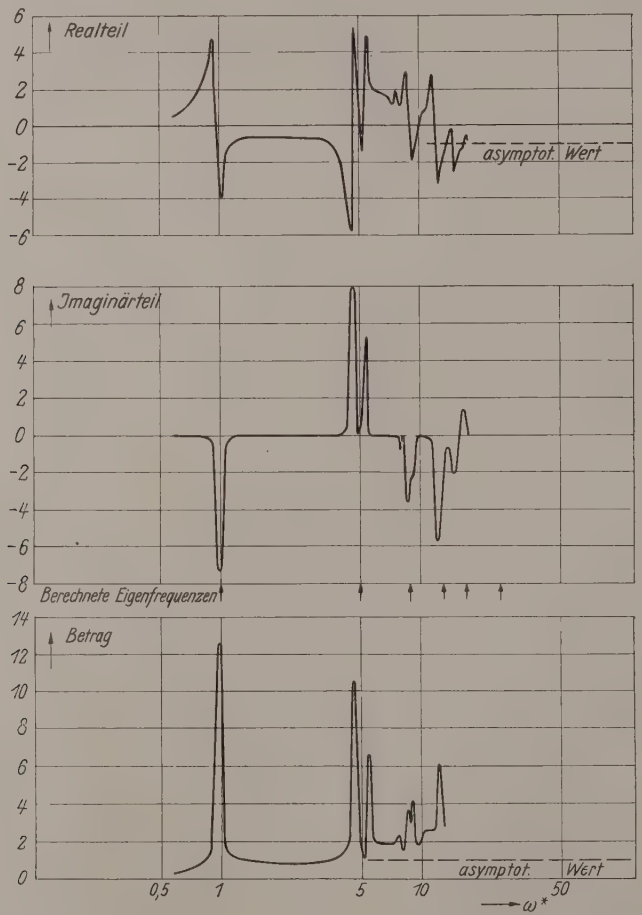

Abb. 8. $\frac{\varrho d \omega^2 u}{p}$ in Abhängigkeit von der Frequenz für die Mitte einer Platte und gleichmäßig verteilte Kraft, gemessen

Platte aus Pertinax $d = 1{,}0$ mm, $\varrho d = 0{,}14$ g cm^{-2}, $\omega_{11} = 86$ Hz, $\eta = 0{,}04$ bis $0{,}08$

die Amplitudenverteilung längs des Schnitts also durch $\sin \frac{3\pi x}{a}$ bestimmt. Die anderen Eigenfunktionen liefern keinen merklichen Beitrag, wie man aus den Angaben S. 121 berechnen kann. Die Anteile der Summenglieder von (8), praktisch keinen Einfluß (vgl. Abb. 1). Der Anteil, der zu $m = 3$, $n = 3$ gehört, ist durch den steilsten Teil der Resonanzkurve bestimmt. Er hängt daher stark von Frequenz und Dämpfung ab, so daß man ihn nicht in sicherer Größe

in Abb. 10 einzeichnen kann. Die Gesamtamplitude (Abb. 10 *g*) ist deshalb eingezeichnet für zwei Fälle: 1. ausgezogen: ω^* ist genau gleich 9; die Gesamtamplitude ergibt sich dann als Summe von *a*, *b*, *c*, *d*, *f*. 2. Gestrichelt: ω^* ist ein wenig größer; die Gesamtamplitude ist dann die Summe von *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

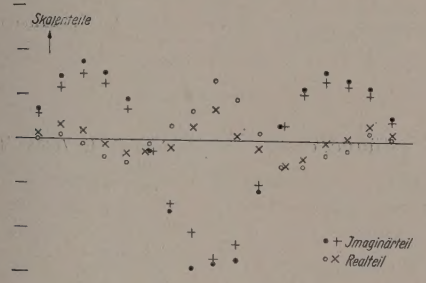

Abb. 9. Amplitudenverteilung auf einer Platte, gemessen
Platte aus Glas, siehe Abb. 7. $\omega \approx \omega_{33}$, $\omega_{33} = 700$ Hz

Die Meßpunkte der Abb. 9 (die Kreise und Kreuze beziehen sich auf zwei nacheinander ausgeführte Meßreihen) liegen offensichtlich zwischen diesen beiden Fällen; die Kreise näher beim ersten, die Kreuze näher beim zweiten Fall, was auf eine geringe Zunahme der Frequenz während der Messung schließen läßt.

Der Gültigkeitsbereich der asymptotischen Formel (9) ist bei keiner der untersuchten Platten erreicht worden. Die Frequenzkurven Abb. 7 und 8 deuten lediglich an, daß bei der stärker gedämpften Platte die Amplituden mit wachsender Frequenz rascher ihren asymptotischen Werten sich nähern. Mehr ist bei der verhältnismäßig geringen Dämpfung der Platten und dem beschränkten der Messung zugänglichen Frequenzbereich (der bei allen Platten etwa bis $\omega^* = 20$ reichte) auch nicht zu erwarten. Leider ist jede Anordnung, die in dieser Richtung weiterhelfen würde, mit großen technischen Schwierigkeiten verknüpft.

III. Eine Anwendung auf die Schallübertragung durch Einfachwände

Im Bereich der Frequenzen hörbaren Schalls sind Einfachwände üblicher Ausmaße als dünne Platten anzusehen. Die Schallübertragung durch eine Wand wird durch die Biegungsschwingungen vermittelt, zu denen sie durch auftreffenden Luftschall angeregt wird. Ein genaues Verständnis der Schallübertragung erfordert also die Kenntnis des Verhaltens erzwungener Biegungsschwingungen. Von technischer Bedeutung ist die Frage: Welcher Bruchteil der auf die eine Seite der Wand auffallenden Schalleistung wird durch die Wand auf die andere Seite übertragen? Den reziproken Wert dieses Bruchteils bezeichnet man als Schalldämmung.

Da es sich um im einzelnen sehr verwickelte Vorgänge handelt, ist im allgemeinsten Fall kaum ein genaues Verständnis zu gewinnen. Jedoch kann man einige Erscheinungen verstehen von dem Grenzfall aus, in dem die Wandschwingungen das asymptotische Gesetz (9) befolgen. Dies sei hier kurz skizziert[1]).

Auf die Schalldämmung von Einfachwänden ist, wie zahlreiche Messungen gezeigt haben, in der Hauptsache nur eine einzige Wandeigenschaft von Einfluß, nämlich die Wandmasse je Flächeneinheit. Dies läßt sich so erklären: Die erste Eigenfrequenz von Wänden üblicher Ausmaße liegt zwischen 1 und 100 Hz. Die Schall-

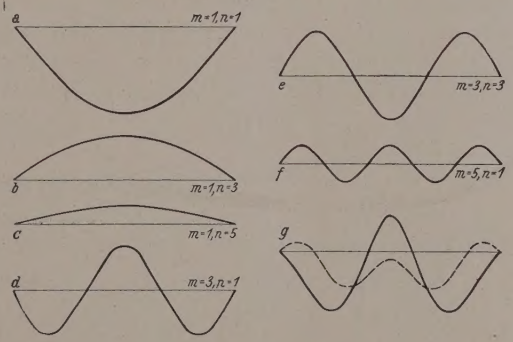

Abb. 10. Der Aufbau des Realteils der Amplitudenverteilung von Abb. 9

dämmungsmessungen werden meist in dem Frequenzbereich von 100—3000 Hz ausgeführt. Sofern die Wände genügend gedämpft sind, ist also zu erwarten, daß in diesem Bereich das asymptotische Gesetz gilt, oder doch wenigstens

[1]) Ausführlicher wird hierüber demnächst berichtet werden.

in einiger Annäherung gilt. Dann ist verständlich, daß die Wandmasse für die Schalldämmung von ausschlaggebender Bedeutung ist.

Auf Grund von (9) kann man (unter einigen weiteren vereinfachenden Voraussetzungen) die Schwingungsamplituden einer Wand und ihre Schalldämmung berechnen. Direkte Messungen der Amplituden einer Anzahl von Wänden, die durch Luftschall angeregt wurden, ergaben nun Werte, die 5—10mal so groß sind als (9) erwarten läßt[1]). Damit im Einklang steht, daß die Messungen der Schalldämmung meist kleinere Werte ergeben als die Berechnung auf Grund von (9). Das läßt darauf schließen, daß in dem Frequenzbereich, in dem man die Schalldämmung zu messen pflegt, das asymptotische Gesetz meist noch nicht ganz erfüllt ist. Dann sind ja größere Amplituden und damit kleinere Schalldämmungen möglich, als Folge von Resonanz mit Eigenfrequenzen.

Es ist zu erwarten, daß die Übereinstimmung zwischen berechneter und gemessener Schalldämmung um so besser ist, je besser die Voraussetzungen für die Gültigkeit von (9) erfüllt sind. Tatsächlich zeigt eine genauere Betrachtung der Schalldämmungswerte unter Berücksichtigung der ersten Eigenfrequenz der Wände, daß die Abweichung der gemessenen von den berechneten Werten um so kleiner ist, je tiefer die erste Eigenfrequenz liegt. Bei Wänden mit sehr tiefer Grundfrequenz herrscht genaue Übereinstimmung.

Noch eine andere Erfahrungstatsache vermag das asymptotische Gesetz zu erklären: Fällt eine ebene Welle in beliebiger Richtung auf eine Wand, dann ist die übertragene Schallwelle auch eine ebene Welle derselben Richtung. Darauf beruht es, daß man oft anzugeben vermag, in welcher Richtung eine Schallquelle liegt, die man durch eine Wand hindurch hört. Die Erklärung folgt daraus, daß die Verteilung der Schwingungsamplituden auf der Wand dem Betrag und der Phase nach ein Abbild der Druckverteilung ist.

[1]) E. Meyer, Grundlegende Messungen zur Schallisolation von Einfachtrennwänden, S.-B. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. 1931.

Zusammenfassung

Für dünne, ebene Platten wird die Amplitude erzwungener sinusförmiger Schwingungen unter Berücksichtigung der Dämpfung berechnet. Aus dem Ergebnis folgen Aussagen über die Schärfe der Knotenlinien der Klangfiguren. Für den Grenzfall hoher Frequenzen läßt sich für die Amplitude der erzwungenen Schwingung ein einfaches asymptotisch gültiges Gesetz angeben. Danach verhält sich die Platte in diesem Grenzfall so, als ob sie keine Steifigkeit besäße.

Soweit möglich, wurden die theoretischen Folgerungen durch Messungen geprüft und im wesentlichen bestätigt.

Das asymptotische Gesetz rechtfertigt teilweise einen Ansatz, der mehrfach zur Berechnung der Schallübertragung durch Wände gemacht wurde.

Die vorliegende Arbeit wurde veranlaßt durch die Untersuchungen von Herrn Prof. E. Meyer über die Schallübertragung durch Wände. Für diese Anregung und für seine rege Anteilnahme möchte ich Herrn Prof. Meyer herzlichst danken.

(Eingegangen am 21. Januar 1937.)

Lebenslauf.

Ich, Arnold Schoch, bin am 9. Oktober 1911 als Sohn des Architekten Karl Schoch in Stuttgart geboren. Ich bin arischer Abstammung. Ich besuchte das Karlsgymnasium in Stuttgart, wo ich im Frühjahr 1930 die Reifeprüfung ablegte. Nach $^1/_2$jähriger Werkstatt-Tätigkeit studierte ich Physik und Mathematik, von 1930 bis 1933 an der Technischen Hochschule in Stuttgart, von 1933 bis 1935 an der Universität Berlin. Seit Sommer 1934 arbeite ich im Institut für Schwingungsforschung zu Berlin, wo ich auch meine Dissertation anfertigte.

Meine Lehrer waren die Professoren: Bieberbach, Doetsch, Emde, Ewald, Grammel, Grube, Hettner, Hückel, Kutta, v. Laue, Meyer, Pfeiffer, Regener und Schmidt.